

第 12 回：二乗項を含む回帰

北村 友宏

2020 年 7 月 24 日

本日の内容

1. 二乗項を含む回帰
2. 二乗項を含む消費関数の推定

二乗項を含む回帰

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + u_i,$$

$$E(u_i | x_i) = 0,$$

$$E(u_i u_j | x_i) = 0 \quad (i \neq j),$$

$$V(u_i | x_i) = \sigma^2,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

を推定することを考える。

- ▶ 二乗項が入っているので厳密には非線形回帰モデルであるが、 x_i^2 は「二乗」まで含めて1つの変数と考えれば、線形回帰モデルと同様の手法で推定できる。

偏微分による回帰係数の解釈

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + u_i$$

を x_i で偏微分すると,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \beta_1 + 2\beta_2 x_i.$$

これは**限界効果** (**marginal effect**, x_i が 1 単位変化すると y_i が何単位変化するか)

⇒ この場合, 限界効果は x_i の値に依存して変化する.

- ▶ 二乗項のないモデル $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ なら, 限界効果は $\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \beta_1$ で, x_i にかかわらず一定.

β_1 も β_2 も統計的に有意に 0 と異なれば，以下の解釈ができる ($x_i \geq 0$ の場合).

▶ $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$

- ▶ 限界効果は正で， x_i が大きくなるにつれて限界効果が大きくなる.

▶ $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$

- ▶ x_i が小さいときは限界効果は正であるが， x_i が大きくなるにつれて限界効果が小さくなり，やがて限界効果は負に変わる.

▶ $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$

- ▶ x_i が小さいときは限界効果は負であるが， x_i が大きくなるにつれて限界効果が大きくなり，やがて限界効果は正に変わる.

▶ $\beta_1 < 0, \beta_2 < 0$

- ▶ 限界効果は負で， x_i の値が大きくなるにつれて限界効果が（負の方向に）小さくなる.

「 $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$ 」の場合と「 $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$ 」の場合において、限界効果の符号が変わる点での説明変数 x_i の値は、

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \beta_1 + 2\beta_2 x_i = 0 \Leftrightarrow x_i = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}.$$

⇒ 一乗項の偏回帰係数 β_1 と二乗項の偏回帰係数 β_2 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ を求め、

$$-\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2}$$

を計算すれば、限界効果の符号が変わる点での説明変数の値が求まる。

gretl での変数の二乗の作成方法

gretl の画面で、二乗を作成したい変数をクリックして選択し、メニューバーから「追加」→「選択された変数の二乗」と操作すると、選択した変数の二乗が作成される。

- ▶ 二乗の変数名は、「sq_ (元の変数名)」となる。

二乗項を含む消費関数の推定

「女性ダミー変数」と「可処分所得の二乗項」を含む消費関数

$$c_i = \beta_0 + \beta_Y y_i + \beta_D d_i + \beta_{YY} y_i^2 + u_i \quad (1)$$

を推定する.

実習 1

1. gretl を起動.
2. 「ファイル」 → 「データを開く」 → 「ユーザー・ファイル」と操作.
3. 消費 2009.gdt を選択し, 「開く」をクリック.
4. 「income_th」をクリックして選択し, メニューバーから「追加」 → 「選択された変数の二乗」と操作.
 - ▶ income_th の二乗という定義の, sq_income_th という名前の変数が作成される.
5. メニューバーから「ファイル」 → 「データを保存」と操作. これでデータセットが上書き保存される.

6. gretl のメニューバーから「モデル」→「通常の最小二乗法」と操作.
7. 出てきたウィンドウ左側の変数リストにある consumption_th をクリックし, 3つの矢印のうち上の青い右向き矢印をクリック.
 - ▶ 推定式の左辺の変数 (被説明変数, 従属変数) が consumption_th (千円単位の消費支出) となる.

8. ウィンドウ左側の変数リストにある `income_th` をクリックし、3つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック。続いてウィンドウ左側の変数リストにある `female` をクリックし、3つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック。さらに続いてウィンドウ左側の変数リストにある `sq_income_th` をクリックし、3つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック。

- ▶ 推定式の右辺の変数（説明変数，独立変数）が `income_th`（千円単位の可処分所得）と `female`（女性ダミー）と `sq_income_th`（千円単位の可処分所得の二乗）の3つとなる。
- ▶ 最初から説明変数リストに入っている `const` は推定式の切片（定数項）のこと。

9. 「頑健標準誤差を使用する」にチェック。
 - ▶ 不均一分散に対して頑健な、White の標準誤差が計算され、推定式の誤差項 u_i の分散に関する仮定が誤っていても、より厳密な分析ができるようになる。
10. 「OK」をクリックすると、結果が新しいウィンドウに表示される。

gretl: モデル

ファイル 編集(E) 検定(D) 保存(S) グラフ(G) 分析(A) LaTeX

モデル 1

モデル 1: 最小二乗法 (OLS), 観測: 1-92
 従属変数: consumption_th
 不均一分散頑健標準誤差, バリエーション HC1

	係数	標準誤差	t値	p値
const	13.9345	58.7970	0.2370	0.8132
income_th	0.740038	0.464393	1.594	0.1146
female	24.4644	8.77930	2.787	0.0065 ***
sq_income_th	-0.000272566	0.000919382	-0.2965	0.7676
Mean dependent var	182.0635	S.D. dependent var	37.66171	
Sum squared resid	79184.66	S.E. of regression	29.99709	
R-squared	0.386521	Adjusted R-squared	0.365607	
F(3, 88)	24.35706	P-value(F)	1.45e-11	
Log-likelihood	-441.3988	Akaike criterion	890.7976	
Schwarz criterion	900.8848	Hannan-Quinn	894.8689	

このような画面が表示されれば成功。「gretl: モデル」のウィンドウは**まだ閉じない!**

二乗項を含む消費関数推定結果

▶ 所得の一乗項の係数

- ▶ 0.740038 (符号は正)
- ▶ 係数ゼロの H_0 採択。
↳ 所得の二乗項を含めたことで、所得の一乗項と消費の有意な相関が検出されなくなった。

▶ 所得の二乗項の係数

- ▶ -0.000272566 (符号は負)
- ▶ 係数ゼロの H_0 採択。
↳ 所得の二乗項と消費にも有意な相関が検出されていない。

⇒ 所得に関しては、一乗項の係数も二乗項の係数も統計的に有意に0と異なるとはいえないという結果になったため、限界効果の大きさに関する解釈はできない。

もし，所得の一乗項の係数と二乗項の係数がどちらも統計的に有意に 0 と異なれば，

$$-\frac{\hat{\beta}_Y}{2\hat{\beta}_{YY}} \approx 1,357.539$$

なので，以下のような解釈ができる。

- ▶ 可処分所得が 1,357,539 円 (1,357.539 千円) に達するまでは，可処分所得が増加すると消費支出も増加する。また，可処分所得が増加するにつれ，消費支出の増え方は次第に小さくなる。
- ▶ 可処分所得が 1,357,539 円に達した後は，可処分所得が増加すると消費支出が減少する。また，可処分所得が増加するにつれ，消費支出の減り方は次第に大きくなる。

▶ 女性ダミーの係数

- ▶ 24.4644 (符号は正)
- ▶ 有意水準 1%で, 係数ゼロの H_0 棄却.
 - ↳ 所得を一定として, 女性は男性に比べ統計的に有意に, 消費支出額が平均して 24,464.4 円 (24.4644 千円) 大きい.

▶ 定数項

- ▶ 13.9345 (符号は正)
- ▶ 係数ゼロの H_0 採択.
 - ➡ 定数項は統計的に有意に 0 と異なるとはいえない.

▶ 自由度修正済み決定係数

- ▶ $\bar{R}^2 = 0.365607$.
 - ➡ 所得の一乗と女性ダミーと所得の二乗は消費の変動の約 36.6% を説明できている.
 - ➡ 前回推定した, 女性ダミー変数を含む消費関数 (消費を所得と女性ダミーに回帰) の自由度修正済み決定係数 \bar{R}^2 は 0.372248 で, それと比較すると, モデルの当てはまりは改善されていない.
 - ➡ この場合, 所得の二乗項を追加しても, モデルの当てはまりは改善されず, 逆に悪化した.

本日の作業はここまで.